Một trò chơi ƯCLN–BCNN:
từ IMO 2026 đến bài toán đếm số bước

Cùng Học Toán
cunghoctoan.com · cunghoctoan.net

Abstract

Xuất phát từ Bài 1 IMO 2026, chúng tôi nghiên cứu số bước của quá trình thay hai số $m, n > 1$ bằng $\gcd(m,n)$ và $\operatorname{lcm}(m,n)/\gcd(m,n)$. Với hai số ban đầu, số bước được tính bằng các thuật toán Euclid trên số mũ của từng số nguyên tố. Với $A, B > 1$ nguyên tố cùng nhau, chúng tôi xác định toàn bộ số bước có thể xảy ra khi các số ban đầu thuộc $\{A, B, AB\}$. Tập số bước này luôn gồm các số nguyên liên tiếp và có công thức tường minh cho giá trị nhỏ nhất, lớn nhất. Tuy nhiên, bảng (A^2B, A^2B, AB^2) có tập số bước là $\{3, 5, 6, 7\}$. Với mỗi số nguyên $\ell \geq 4$, chúng tôi còn xây dựng một bảng có các quá trình gồm $\ell - 1$ và $\ell + 1$ bước, nhưng không có quá trình gồm ℓ bước.

Từ khóa. Ước chung lớn nhất; bội chung nhỏ nhất; thuật toán Euclid; bất biến; số bước.

1 Introduction

Bài 1 IMO 2026 xét một bảng gồm 2026 số nguyên lớn hơn 1. Mỗi bước, ta chọn hai số $m, n > 1$, xóa chúng và viết vào hai vị trí ấy hai số

$$\gcd(m,n) \quad \text{và} \quad \frac{\operatorname{lcm}(m,n)}{\gcd(m,n)}. \tag{1}$$

Ở đây, $\gcd(m,n)$ và $\operatorname{lcm}(m,n)$ lần lượt là ước chung lớn nhất (ƯCLN) và bội chung nhỏ nhất (BCNN) của m, n. Hai số được chọn phải ở hai vị trí khác nhau, nhưng có thể có cùng giá trị. Các số 1 không được chọn. Ta tiếp tục thực hiện các bước cho đến khi không còn hai số lớn hơn 1 trên bảng.

Đề bài yêu cầu chứng minh rằng mọi cách chọn đều dẫn đến một bảng có đúng một số lớn hơn 1, và số này không phụ thuộc vào những cặp đã chọn; xem [1]. Kết luận vẫn đúng khi thay 2026 bằng một số nguyên $r \geq 2$. Bất biến trên số mũ của các số nguyên tố và công thức cho số cuối cùng đã có trong các lời giải của Chen [2] và Bado [3]. Đại lượng giảm dùng để chứng minh sự kết thúc trong Mục 2 cũng đã được trình bày trong [3].

Số cuối cùng không phụ thuộc vào cách chọn cặp. Với bảng $(2, 2, 6)$, bạn có tìm được hai ván có số bước khác nhau không? Hãy thử chơi một ván bắt đầu bằng hai số 2, rồi chơi lại từ đầu, lần này chọn 2 và 6 trước.

Khi ghi hai ván dưới đây, ta bỏ các số 1 và không xét thứ tự các số còn lại, nhưng vẫn ghi đủ số lần xuất hiện của mỗi số. Mỗi mũi tên biểu diễn một bước:

$$(2,2,6) \longmapsto (2,6) \longmapsto (2,3) \longmapsto 6,$$
$$(2,2,6) \longmapsto (2,2,3) \longmapsto (2,6) \longmapsto (2,3) \longmapsto 6.$$

Cả hai ván đều kết thúc ở 6, nhưng ván thứ nhất có ba bước, còn ván thứ hai có bốn bước. Với một bảng ban đầu cho trước, những số bước nào có thể xảy ra?

Ký hiệu $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ là tập các số bước có thể xảy ra khi chơi từ bảng $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ cho đến khi không còn cặp nào được phép chọn. Hai ván trên cho thấy $3, 4 \in \mathcal{L}(2, 2, 6)$, nhưng chưa loại trừ những số bước khác. Bài viết xác định toàn bộ tập $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ trong một số trường hợp. Nếu bảng chỉ có một số $a > 1$, ta đặt $\mathcal{L}(a) = \{0\}$, vì không cần thực hiện bước nào.

Trường hợp hai số dẫn đến thuật toán Euclid bằng phép trừ. Số bước của thuật toán ấy bằng tổng các thương trong thuật toán Euclid thông thường; đây là một kết quả cổ điển, xem [4]. Độ dài của thuật toán bằng phép trừ cũng được nghiên cứu trong [5]. Định lý 3.3 kết hợp các số bước ứng với từng số nguyên tố để tính số bước của trò chơi.

Đối với nhiều số, chúng tôi xét các bảng có phần tử thuộc $\{A, B, AB\}$, với $A, B > 1$ và $\gcd(A, B) = 1$. Mọi số lớn hơn 1 được tạo ra vẫn thuộc tập này. Định lý 4.1 xác định toàn bộ tập số bước của các bảng ấy. Định lý 5.1 sau đó cho một bảng có tập số bước không gồm các số nguyên liên tiếp; Bổ đề 5.3 mở rộng ví dụ này thành một họ vô hạn.

Ký hiệu về số mũ. Với số nguyên tố p và số nguyên dương t, ký hiệu $v_p(t)$ là số mũ của p trong phân tích của t ra thừa số nguyên tố. Nếu p không chia t thì $v_p(t) = 0$. Chẳng hạn, từ $72 = 2^3 \cdot 3^2$, ta có $v_2(72) = 3$, $v_3(72) = 2$ và $v_5(72) = 0$. Đặt $\Omega(t) = \sum_p v_p(t)$, trong đó tổng lấy trên các số nguyên tố. Chỉ có hữu hạn số hạng khác 0. Như vậy $\Omega(t)$ đếm số thừa số nguyên tố của t, tính cả số lần lặp; ví dụ $\Omega(72) = 5$.

Ta dùng $v_p(1) = \Omega(1) = 0$. Vì $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, ta có $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b)$. Ngoài ra, $\gcd(u, 0) = u$ với $u \geq 0$; do đó thêm các số 0 không làm thay đổi ƯCLN của một bộ số. Ta quy ước $\gcd(0, \dots, 0) = 0$.

2 Giá trị cuối cùng và chặn số bước

Chúng tôi nhắc lại lời giải bằng số mũ của các số nguyên tố để người đọc có thể theo dõi mà không cần tra các lời giải khác. Các lập luận cơ bản trong định lý sau đã có trong [2, 3].

Định lý 2.1. *Cho các số nguyên $a_1, \dots, a_r > 1$, với $r \geq 2$. Mọi quá trình đều kết thúc sau hữu hạn bước với đúng một số $M > 1$. Đặt $P = a_1 \cdots a_r$. Khi đó*

$$M = \prod_{p \mid P} p^{\gcd(v_p(a_1), \dots, v_p(a_r))}, \tag{2}$$

trong đó tích lấy trên các số nguyên tố chia P. Vì thế M không phụ thuộc vào cách chọn cặp.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh quá trình kết thúc. Trong chứng minh này, vẫn giữ các số 1 khi ghi bảng $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$. Đặt $P(\mathbf{b}) = b_1 \cdots b_r$, và gọi $C(\mathbf{b})$ là số phần tử lớn hơn 1 trên bảng.

Giả sử một bước chọn $m, n > 1$, và đặt $d = \gcd(m, n)$. Do $\gcd(m, n)\,\mathrm{lcm}(m, n) = mn$, hai số mới là d và mn/d^2. Hai số bị xóa có tích mn, còn hai số mới có tích mn/d. Các số khác không đổi, nên tích trên bảng được chia cho d. Theo tính chất cộng của Ω, đại lượng $\Omega(P(\mathbf{b}))$ giảm đúng $\Omega(d)$.

Nếu $d = 1$, cặp mới là $(1, mn)$, nên C giảm một. Nếu $d > 1$, đại lượng $\Omega(P(\mathbf{b}))$ giảm ít nhất một, còn C không tăng. Vì vậy, sau mỗi bước, số nguyên không âm

$$\Phi(\mathbf{b}) = \Omega(P(\mathbf{b})) + C(\mathbf{b})$$

giảm ít nhất một. Một số nguyên không âm không thể giảm như vậy vô hạn lần, nên quá trình phải kết thúc.

Khi kết thúc, bảng còn nhiều nhất một số lớn hơn 1; nếu còn hai số như vậy thì vẫn có thể chọn chúng. Mặt khác, tích của hai số mới luôn bằng $\operatorname{lcm}(m,n) > 1$, nên mỗi bước vẫn để lại ít nhất một số lớn hơn 1. Do đó bảng cuối có dạng $(M, 1, \dots, 1)$, với $M > 1$.

Ta tiếp tục tìm M bằng một *bất biến*, tức là một đại lượng không thay đổi sau mỗi bước. Cố định một số nguyên tố p, và đặt $u = v_p(m)$, $v = v_p(n)$. Số mũ của p trong ƯCLN là $\min(u,v)$, còn trong BCNN là $\max(u,v)$. Vì vậy số mũ của p trong hai số mới lần lượt là

$$\min(u,v) \quad \text{và} \quad \max(u,v) - \min(u,v) = |u-v|.$$

Ta có $\gcd(u,v) = \gcd(\min(u,v), |u-v|)$: nếu $u \geq v$ thì đây là đẳng thức $\gcd(u,v) = \gcd(v, u-v)$. Các số mũ tại những vị trí không được chọn giữ nguyên. Do đó

$$\gcd(v_p(b_1), \dots, v_p(b_r))$$

là bất biến. Tại bảng cuối, các số mũ là $v_p(M), 0, \dots, 0$, có ƯCLN bằng $v_p(M)$. Suy ra

$$v_p(M) = \gcd(v_p(a_1), \dots, v_p(a_r)).$$

Mỗi số mới đều là ước của mn, nên một số nguyên tố không có trong bảng ban đầu cũng không thể xuất hiện về sau. Đẳng thức (2) suy ra. □

Chẳng hạn, với bảng $(12, 12, 18)$, các số mũ của 2 là $(2,2,1)$, còn các số mũ của 3 là $(1,1,2)$. Cả hai bộ có ƯCLN bằng 1. Vì không có số nguyên tố khác xuất hiện, số cuối cùng luôn là $2 \cdot 3 = 6$.

Hai đại lượng C và Φ còn cho chặn dưới và chặn trên của số bước. Chặn dưới là một số mà mọi số bước đều không nhỏ hơn; chặn trên được hiểu tương tự.

Mệnh đề 2.2. *Giữ các ký hiệu của Định lý 2.1. Nếu một quá trình gồm N bước thì*

$$r - 1 \leq N \leq \Omega(P) - \Omega(M) + r - 1. \tag{3}$$

Dấu bằng bên trái xảy ra khi và chỉ khi mỗi cặp được chọn gồm hai số bằng nhau hoặc hai số nguyên tố cùng nhau. Dấu bằng bên phải xảy ra khi và chỉ khi mỗi cặp được chọn gồm hai số nguyên tố cùng nhau, hoặc hai số khác nhau có ƯCLN là một số nguyên tố.

Chứng minh. Đặt $d = \gcd(m,n)$ cho một bước chọn m, n. Nếu $d = 1$, cặp mới là $(1, mn)$. Nếu $m = n$, cặp mới là $(m, 1)$. Trong cả hai trường hợp, C giảm một. Trong trường hợp còn lại, $d > 1$ và $m \neq n$. Khi đó $\operatorname{lcm}(m,n) > d$, nên cả hai số mới đều lớn hơn 1, và C không đổi.

Như vậy mỗi bước làm C giảm nhiều nhất một. Vì C giảm từ r xuống 1, phải có ít nhất $r-1$ bước. Số bước bằng $r-1$ khi và chỉ khi mỗi bước đều làm C giảm một, tức là khi mọi cặp được chọn bằng nhau hoặc nguyên tố cùng nhau.

Để xét chặn trên, ký hiệu Δ là độ giảm trong một bước, nghĩa là giá trị trước bước trừ giá trị sau bước. Từ phép tính trong chứng minh Định lý 2.1, ta được bảng sau.

Trường hợp	$\Delta\Omega(P(\mathbf{b}))$	ΔC	$\Delta\Phi$
$d = 1$	0	1	1
$m = n$	$\Omega(m)$	1	$\Omega(m) + 1$
$d > 1, m \neq n$	$\Omega(d)$	0	$\Omega(d)$

Mỗi độ giảm của Φ ít nhất bằng 1. Giá trị ban đầu và cuối cùng của Φ lần lượt là $\Omega(P) + r$ và $\Omega(M) + 1$, nên

$$N \leq (\Omega(P) + r) - (\Omega(M) + 1).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi mỗi bước làm Φ giảm đúng một. Trong hàng thứ hai của bảng, $\Omega(m) + 1 \geq 2$ vì $m > 1$. Trong hàng thứ ba, $\Omega(d) = 1$ khi và chỉ khi d là số nguyên tố. Điều này cho đúng điều kiện ở phát biểu. □

3 Số bước khi bảng có hai số

Khi bảng ban đầu chỉ có hai số $m, n > 1$, tại mỗi bước chưa kết thúc chỉ có một cặp được phép chọn. Do đó $\mathcal{L}(m, n)$ chỉ có một phần tử; ký hiệu số bước ấy là $N(m, n)$. Phép biến đổi các số mũ trong chứng minh trên dẫn đến thuật toán Euclid bằng phép trừ.

Trong thuật toán này, mỗi bước giữ lại số nhỏ hơn và thay số lớn hơn bằng hiệu của hai số. Ta dừng khi một số bằng 0. Cụ thể, đặt $F(u, v) = (\min(u, v), |u - v|)$ với u, v là các số nguyên không âm. Ký hiệu $F^j(u, v)$ là cặp nhận được sau j lần liên tiếp áp dụng F, với $F^0(u, v) = (u, v)$.

Bổ đề 3.1. *Cho $(u, v) \neq (0, 0)$. Gọi $s(u, v)$ là số lần áp dụng F cho đến khi lần đầu một thành phần bằng 0; nếu ngay từ đầu $uv = 0$ thì đặt $s(u, v) = 0$. Khi đó $s(u, v)$ hữu hạn.*

Đặt $g = \gcd(u, v)$ và $s = s(u, v)$. Nếu $s > 0$ thì

$$F^s(u, v) = (g, 0) \quad \text{và} \quad F^t(u, v) = (0, g) \text{ với mọi } t \geq s + 1.$$

Nếu $s = 0$ thì $F^t(u, v) = (0, g)$ với mọi $t \geq 1$.

Chứng minh. Khi cả hai thành phần đều dương, tổng của chúng giảm sau mỗi bước, bởi $\min(u, v) + |u - v| = \max(u, v) < u + v$. Tổng ấy là một số nguyên không âm, nên sau hữu hạn bước phải có một thành phần bằng 0.

ƯCLN của hai thành phần được giữ nguyên qua F. Nếu $s > 0$, ngay trước bước thứ s cả hai thành phần còn dương. Thành phần thứ nhất sau bước này là giá trị nhỏ hơn của hai số dương ấy, nên vẫn dương. Vì thế thành phần thứ hai mới là thành phần bằng 0. Cặp thu được có ƯCLN bằng g, nên phải là $(g, 0)$.

Ta có $F(g, 0) = (0, g)$ và $F(0, g) = (0, g)$. Do đó sau một lần áp dụng F nữa, cặp trở thành $(0, g)$ và giữ nguyên ở mọi lần sau. Nếu $s = 0$, cặp ban đầu là $(g, 0)$ hoặc $(0, g)$, nên hai đẳng thức này cũng cho kết luận. □

Theo quy ước vừa nêu, phép biến đổi $(g, g) \mapsto (g, 0)$ được tính là một bước. Điều này giải thích vì sao công thức sau phải tính cả thương của phép chia cuối cùng. Công thức ấy là kết quả cổ điển về thuật toán Euclid bằng phép trừ; xem [4].

Bổ đề 3.2. *Cho u, v là hai số nguyên dương. Nếu $q_1, \dots, q_t$ là các thương trong thuật toán Euclid áp dụng cho $\max(u, v)$ và $\min(u, v)$, kể cả thương trong phép chia cuối cùng có số dư bằng 0, thì*

$$s(u, v) = q_1 + \cdots + q_t.$$

Chứng minh. Vì $F(u, v) = F(v, u)$, ta có $s(u, v) = s(v, u)$ và có thể giả sử $u \geq v$. Viết $u = qv + w$, với $0 \leq w < v$. Trong q bước đầu, mỗi bước trừ v khỏi số còn lại. Thật vậy, sau $j < q$ lần trừ, số còn lại là $u - jv \geq v$; sau đúng q lần trừ, số còn lại là w. Vì thế cặp sau q bước là (v, w).

Nếu $w = 0$, thuật toán kết thúc sau đúng q bước. Nếu $w > 0$, còn phải thực hiện $s(v, w)$ bước. Trong cả hai trường hợp,

$$s(u, v) = q + s(v, w), \qquad \text{với } s(v, 0) = 0.$$

Áp dụng đẳng thức này lần lượt cho các phép chia của thuật toán Euclid, mỗi thương đóng góp đúng số phép trừ tương ứng, nên tổng số bước bằng $q_1 + \cdots + q_t$. □

Chẳng hạn, các phép chia $8 = 2 \cdot 3 + 2$, $3 = 1 \cdot 2 + 1$ và $2 = 2 \cdot 1$ cho $s(8, 3) = 2 + 1 + 2 = 5$. Năm bước bằng phép trừ là

$$(8, 3) \longmapsto (3, 5) \longmapsto (3, 2) \longmapsto (2, 1) \longmapsto (1, 1) \longmapsto (1, 0).$$

Khi trở lại trò chơi, cần lưu ý rằng một số bằng 1 khi và chỉ khi mọi số mũ của nó đều bằng 0. Việc mỗi cặp số mũ đã có một thành phần bằng 0 chưa đủ để kết thúc: các thành phần bằng 0 ấy phải cùng thuộc một số trên bảng. Chẳng hạn, với cặp $(2,3)$, số mũ của 2 bằng 0 ở số thứ hai, còn số mũ của 3 bằng 0 ở số thứ nhất; cả hai số vẫn lớn hơn 1.

Định lý 3.3. *Cho hai số nguyên $m,n>1$. Với mỗi số nguyên tố $p\mid mn$, đặt*

$$s_p = s(v_p(m),v_p(n)) \quad \textit{và} \quad K=\max_{p\mid mn} s_p.$$

Khi đó

$$N(m,n)=\begin{cases} K, & \textit{nếu } K>0 \textit{ và } s_p=K \textit{ với mọi } p\mid mn,\\ K+1, & \textit{trong các trường hợp còn lại.}\end{cases} \tag{4}$$

Chứng minh. Ở mỗi bước, ta viết ƯCLN ở vị trí thứ nhất. Đặt $(m_0,n_0)=(m,n)$ và xác định các cặp tiếp theo bởi

$$m_{j+1}=\gcd(m_j,n_j) \quad \text{và} \quad n_{j+1}=\frac{m_jn_j}{\gcd(m_j,n_j)^2}, \qquad j\ge 0.$$

Ta vẫn có thể dùng công thức này khi một số đã bằng 1. Khi đếm bước của trò chơi, ta dừng tại chỉ số đầu tiên j mà $m_j=1$ hoặc $n_j=1$; các cặp sau đó chỉ giúp theo dõi công thức.

Với mỗi $p\mid mn$, đặt $g_p=\gcd(v_p(m),v_p(n))$. Ít nhất một trong hai số mũ dương, nên $g_p>0$. Phép biến đổi các số mũ cho

$$(v_p(m_{j+1}),v_p(n_{j+1}))=F(v_p(m_j),v_p(n_j)).$$

Do đó Bổ đề 3.1 mô tả vị trí các số mũ bằng 0 ở mọi bước. Không có số nguyên tố ngoài các ước nguyên tố của mn xuất hiện.

Nếu $K=0$, ta có $s_p=0$ với mọi $p\mid mn$, nghĩa là mỗi số nguyên tố chỉ chia một trong hai số m,n. Vì vậy $\gcd(m,n)=1$, và ngay bước đầu cho $(1,mn)$. Suy ra $N(m,n)=1=K+1$.

Giả sử $K>0$. Có một số nguyên tố p với $s_p=K$. Trước bước thứ K, cả hai số mũ của p còn dương; vì thế cả hai số trên bảng vẫn lớn hơn 1. Quá trình chưa thể kết thúc trước bước thứ K.

Nếu $s_p=K$ với mọi $p\mid mn$, Bổ đề 3.1 cho cặp số mũ $(g_p,0)$ tại bước thứ K, với mọi p. Như vậy mọi số mũ của n_K đều bằng 0, nên $n_K=1$ và $N(m,n)=K$.

Còn lại trường hợp có một số nguyên tố q với $s_q<K$. Nếu $s_q>0$ thì $K\ge s_q+1$; nếu $s_q=0$ thì $K\ge 1$. Trong cả hai trường hợp, Bổ đề 3.1 cho cặp số mũ của q tại bước thứ K là $(0,g_q)$. Vì vậy $q\mid n_K$, nên $n_K>1$. Trong khi đó, một số nguyên tố p có $s_p=K$ vẫn chia m_K, nên $m_K>1$.

Tại bước thứ K, với mỗi số nguyên tố, một trong hai số mũ đã bằng 0. Do đó $\gcd(m_K,n_K)=1$. Bước tiếp theo cho cặp $(1,m_Kn_K)$ và kết thúc quá trình. Suy ra $N(m,n)=K+1$. □

Nhận xét. Với một số nguyên tố p và các số nguyên dương a,b, chỉ có một cặp số mũ cần xét. Do đó $N(p^a,p^b)=s(a,b)$, và số bước bằng tổng các thương trong thuật toán Euclid áp dụng cho a,b.

Ví dụ 3.4. Với $(m,n)=(6,12)$, các cặp số mũ của 2 và 3 lần lượt là $(1,2)$ và $(1,1)$, nên $s_2=2$ và $s_3=1$. Vì $K=2$ nhưng hai giá trị s_2,s_3 khác nhau, ta có $N(6,12)=3$. Bảng sau ghi các cặp số mũ theo đúng thứ tự của hai số trên bảng.

Sau số bước	Cặp số trên bảng	Số mũ của 2	Số mũ của 3
0	$(6,12)$	$(1,2)$	$(1,1)$
1	$(6,2)$	$(1,1)$	$(1,0)$
2	$(2,3)$	$(1,0)$	$(0,1)$
3	$(1,6)$	$(0,1)$	$(0,1)$

Sau hai bước, mỗi cặp số mũ đã có một số 0, nhưng chúng nằm ở hai vị trí khác nhau. Sau ba bước, mọi số mũ ở vị trí thứ nhất mới cùng bằng 0.

Với $(m,n)=(12,18)$, các cặp số mũ của 2 và 3 là $(2,1)$ và $(1,2)$, cùng cần hai bước. Lần này $N(12,18)=2$, và quá trình là

$$(12,18)\longmapsto(6,6)\longmapsto(6,1).$$

4 Phân loại các bảng gồm ba loại số

Cho $A,B>1$ với $\gcd(A,B)=1$. Ta xét bảng có x số bằng A, y số bằng B và z số bằng AB, rồi ký hiệu tập số bước của bảng này là $\mathcal{L}_{A,B}(x,y,z)$. Một số lượng bằng 0 nghĩa là loại số ấy không xuất hiện. Chẳng hạn, với $A=2$, $B=3$, bảng $(2,2,6)$ tương ứng với $(x,y,z)=(2,0,1)$.

Các số lớn hơn 1 được tạo ra vẫn thuộc $\{A,B,AB\}$. Chẳng hạn, do $\gcd(A,AB)=A$ và $\operatorname{lcm}(A,AB)=AB$, cặp (A,AB) được thay bằng (A,B). Số lần xuất hiện của A không đổi, của B tăng một, còn của AB giảm một. Những phép chọn khác được ghi đầy đủ trong bảng ở chứng minh dưới đây.

Định lý 4.1. *Cho các số nguyên $A,B>1$ nguyên tố cùng nhau, và các số nguyên $x,y,z\geq 0$ với $r=x+y+z\geq 2$. Nếu chỉ một trong ba số x,y,z khác 0 thì*

$$\mathcal{L}_{A,B}(x,y,z)=\{r-1\}.$$

Nếu ít nhất hai trong ba số x,y,z khác 0, đặt

$$\varepsilon=\begin{cases}0, & \text{nếu } x>0 \text{ và } y>0,\\ 1, & \text{nếu } z>0 \text{ và } xy=0.\end{cases}$$

Khi đó số cuối cùng là AB, và

$$\mathcal{L}_{A,B}(x,y,z)=\{r-1+\varepsilon,\dots,2r+z-3\}. \tag{5}$$

Nói cách khác, mọi số nguyên giữa hai đầu mút đã nêu đều là số bước của một quá trình, và không có số bước nào khác.

Chứng minh. Nếu chỉ có một loại số, mỗi bước chọn hai số bằng nhau và thay chúng bằng một số cùng giá trị và một số 1. Số phần tử lớn hơn 1 giảm đúng một sau mỗi bước, nên số bước bằng $r-1$.

Giả sử có ít nhất hai loại số. Với mỗi số nguyên tố $p\mid A$, các số mũ của p trên bảng ban đầu bằng 0 hoặc $v_p(A)$, và có ít nhất một số mũ bằng $v_p(A)$. Vì vậy ƯCLN của chúng bằng $v_p(A)$. Lập luận tương tự áp dụng cho các số nguyên tố chia B. Do $\gcd(A,B)=1$, công thức (2) cho số cuối cùng là AB.

Đếm số bước và tìm các chặn. Để phân biệt với các số lượng ban đầu x, y, z, viết (i, j, k) cho các số lượng tại một bảng trung gian. Đặt $C = i + j + k$ và $W = i + j + 2k$. Như vậy C đếm các số lớn hơn 1, còn W được tính bằng cách cho mỗi số A, B trọng số 1 và mỗi số AB trọng số 2. Tại bảng ban đầu, $C = r$ và $W = W_0$, với $W_0 = x + y + 2z$. Tại bảng cuối chỉ còn AB, nên $C = 1$ và $W = 2$.

Trong bảng dưới đây, ΔC và ΔW là giá trị trước bước trừ giá trị sau bước. Một cặp gồm hai giá trị bằng nhau chỉ được chọn khi giá trị ấy xuất hiện ít nhất hai lần; các cặp còn lại cần ít nhất một số của mỗi loại.

Cặp chọn	Cặp mới	Bộ số lượng mới	ΔC	ΔW
(A, A)	$(A, 1)$	$(i-1, j, k)$	1	1
(B, B)	$(B, 1)$	$(i, j-1, k)$	1	1
(AB, AB)	$(AB, 1)$	$(i, j, k-1)$	1	2
(A, B)	$(1, AB)$	$(i-1, j-1, k+1)$	1	0
(A, AB)	(A, B)	$(i, j+1, k-1)$	0	1
(B, AB)	(B, A)	$(i+1, j, k-1)$	0	1

Gọi N là tổng số bước, và H là số bước chọn (A, AB) hoặc (B, AB). Theo bảng, có H bước giữ nguyên C, còn $N-H$ bước làm C giảm một. Vì C giảm từ r xuống 1, ta có $N-H = r-1$, hay

$$N = r - 1 + H. \tag{6}$$

Tổng độ giảm của W là $W_0 - 2$. Mỗi bước được tính vào H đóng góp đúng một vào tổng này; mọi bước khác đóng góp một số không âm. Do đó $H \le W_0 - 2$.

Nếu $x, y > 0$, ta có thể đạt $H = 0$. Trước hết chọn các cặp (A, A) cho đến khi chỉ còn một số A, rồi làm tương tự với các số B. Tiếp theo chọn (A, B), tạo ra một số AB và một số 1. Lúc này mọi số lớn hơn 1 đều bằng AB; tiếp tục chọn các cặp (AB, AB) đến khi chỉ còn một số. Quá trình ấy không dùng cặp (A, AB) hay (B, AB), nên $H = 0$.

Nếu $y = 0$ và $x, z > 0$, một quá trình không có bước được tính vào H chỉ có thể chọn (A, A) hoặc (AB, AB). Những phép chọn này luôn để lại ít nhất một số A và ít nhất một số AB, nên chưa thể kết thúc. Vì vậy $H \ge 1$. Trường hợp $x = 0$ và $y, z > 0$ được chứng minh tương tự. Ta thu được $\varepsilon \le H \le W_0 - 2$.

Chứng minh mọi giá trị giữa hai chặn đều đạt được. Ta quy nạp theo số nguyên W_0, cho tất cả các bảng có ít nhất hai loại số. Nếu $W_0 = 2$, bảng chỉ có thể là (A, B), và $H = 0$. Giả sử $W_0 > 2$ và khẳng định đã đúng với mọi bảng thuộc lớp đang xét có trọng số ban đầu nhỏ hơn W_0.

Nếu $z > 0$, ít nhất một trong hai số x, y dương. Đổi tên A, B và đồng thời đổi x, y nếu cần, ta giả sử $x > 0$. Chọn (A, AB) đưa bộ số lượng về $(x, y+1, z-1)$. Bảng này có cả A lẫn B và trọng số bằng $W_0 - 1$. Theo giả thiết quy nạp, số bước được đếm theo hai loại (A, AB), (B, AB) trong phần còn lại, ký hiệu H', nhận mọi giá trị $0, 1, \dots, W_0 - 3$. Bước vừa thực hiện cũng được tính vào H, nên $H = 1 + H'$ nhận mọi giá trị $1, \dots, W_0 - 2$. Nếu bảng ban đầu có cả A và B, giá trị $H = 0$ đã được xây dựng ở trên.

Nếu $z = 0$, ta có $x, y > 0$ và $x + y = W_0 > 2$. Do đó ít nhất một trong hai số x, y không nhỏ hơn 2; đổi tên hai loại số nếu cần để có $x \ge 2$. Chọn (A, B) rồi chọn (A, AB). Các bộ số lượng lần lượt là

$$(x, y, 0) \longmapsto (x-1, y-1, 1) \longmapsto (x-1, y, 0).$$

Bước thứ hai thực hiện được vì sau bước đầu vẫn còn $x - 1 \ge 1$ số A. Trong hai bước, chỉ bước thứ hai được tính vào H. Bảng sau hai bước vẫn có cả A và B, và trọng số bằng

$W_0 - 1$. Giả thiết quy nạp cho H' nhận mọi giá trị $0, \dots, W_0 - 3$, nên $H = 1 + H'$ nhận mọi giá trị $1, \dots, W_0 - 2$. Giá trị $H = 0$ cũng đã được xét.

Như vậy mọi giá trị nguyên từ ε đến $W_0 - 2$ đều đạt được. Theo (6), số bước nhỏ nhất là $r - 1 + \varepsilon$, còn số bước lớn nhất là

$$r - 1 + (W_0 - 2) = r - 1 + (r + z - 2) = 2r + z - 3.$$

Mọi số nguyên giữa hai giá trị này đều đạt được, nên (5) được chứng minh. □

Hệ quả 4.2. *Với $r \geq 2$ và $A, B > 1$ nguyên tố cùng nhau, ta có*

$$\mathcal{L}(\underbrace{A, \dots, A}_{r-1 \text{ lần}}, AB) = \{r, \dots, 2r - 2\}.$$

Chứng minh. Ở đây $(x, y, z) = (r - 1, 0, 1)$, nên $\varepsilon = 1$. Thay vào hai đầu mút trong Định lý 4.1, ta được $r - 1 + 1 = r$ và $2r + 1 - 3 = 2r - 2$. □

Chẳng hạn, bảng $(2, 2, 6)$ có $(x, y, z) = (2, 0, 1)$, nên tập số bước chính xác là $\{3, 4\}$. Hai quá trình ở phần mở đầu đã cho các giá trị này; định lý còn chứng minh không có số bước nào khác. Bảng $(2, 3, 6)$ có $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, nên tập số bước là $\{2, 3, 4\}$.

Nhận xét. Một số nguyên dương được gọi là *không chứa bình phương* nếu nó không chia hết cho p^2 với bất kỳ số nguyên tố p nào; ví dụ 6 không chứa bình phương, còn 12 chia hết cho 2^2.

Cho hai số nguyên tố phân biệt p, q. Mọi số lớn hơn 1, không chứa bình phương và không có ước nguyên tố ngoài p, q đều thuộc $\{p, q, pq\}$. Do đó Định lý 4.1 phân loại tất cả các bảng gồm những số như vậy. Nếu có ít nhất hai loại số, thì $\Omega(P) = x + y + 2z = r + z$ và $M = pq$. Chặn trên trong Mệnh đề 2.2 bằng $(r + z) - 2 + r - 1 = 2r + z - 3$, đúng bằng số bước lớn nhất đã đạt được.

5 Tập số bước không nhất thiết liên tiếp

Trong lớp vừa xét, tập số bước gồm tất cả các số nguyên giữa giá trị nhỏ nhất và lớn nhất. Ví dụ sau cho thấy tính chất ấy không đúng với mọi bảng. Để tìm toàn bộ tập số bước, ta xét tất cả các loại cặp có thể chọn ở bước đầu tiên. Sau khi biết bảng còn lại, tổng số bước bằng một cộng với số bước thực hiện từ bảng đó.

Định lý 5.1. *Cho $A, B > 1$ với $\gcd(A, B) = 1$. Khi đó*

$$\mathcal{L}(A^2B, A^2B, AB^2) = \{3, 5, 6, 7\}. \tag{7}$$

Chứng minh. Đặt $X = AB$, $U = A^2B$ và $V = AB^2$. Do $\gcd(A, B) = 1$, ta có $\gcd(U, V) = X$ và $\operatorname{lcm}(U, V) = X^2$. Vì vậy cặp (U, V) được thay bằng (X, X). Mặt khác, $X \mid U$ và $U/X = A$, nên cặp (X, U) được thay bằng (X, A). Các quá trình bắt đầu bằng hai số này là

$$(U, V) \longmapsto (X, X) \longmapsto X,$$
$$(X, U) \longmapsto (X, A) \longmapsto (A, B) \longmapsto X.$$

Hai quá trình này là duy nhất vì ở mỗi bước chỉ có hai số lớn hơn 1. Do đó $N(U, V) = 2$ và $N(X, U) = 3$.

Theo Định lý 4.1 với $(x, y, z) = (1, 0, 2)$, bảng (A, X, X) có tập số bước $\{3, 4, 5\}$.

Xét bảng (X, X, U). Nếu bước đầu chọn hai số X, bảng còn lại là (X, U), nên tổng số bước bằng $1 + 3 = 4$. Nếu bước đầu chọn X và U, cặp này được thay bằng (X, A), còn số

X không được chọn vẫn giữ nguyên. Bảng còn lại là (A, X, X). Các số bước còn lại chính xác là $3, 4, 5$, nên các tổng số bước chính xác là $4, 5, 6$. Hai loại cặp này là tất cả các khả năng. Suy ra

$$\mathcal{L}(X, X, U) = \{4\} \cup \{4, 5, 6\} = \{4, 5, 6\}.$$

Cuối cùng, xét bảng (U, U, V). Chọn hai số U ở bước đầu cho bảng (U, V), nên tổng số bước bằng $1 + 2 = 3$. Chọn U và V ở bước đầu cho bảng (X, X, U), nên các tổng số bước chính xác là $5, 6, 7$. Vì không còn loại cặp nào khác, ta được (7). □

Ví dụ 5.2. Lấy $A = 2$, $B = 3$. Khi đó $\mathcal{L}(12, 12, 18) = \{3, 5, 6, 7\}$. Hai quá trình gồm ba bước và năm bước là

$$(12, 12, 18) \longmapsto (12, 18) \longmapsto (6, 6) \longmapsto 6,$$
$$(12, 12, 18) \longmapsto (12, 6, 6) \longmapsto (12, 6) \longmapsto (6, 2) \longmapsto (2, 3) \longmapsto 6.$$

Không có quá trình gồm bốn bước, theo việc xét hết các lựa chọn ở bước đầu trong chứng minh trên. Ba là số phần tử ban đầu nhỏ nhất có thể xảy ra hiện tượng này, vì với hai phần tử, tập số bước chỉ có một phần tử.

Với các bảng có dạng trong bổ đề sau, ta có thể tạo một bảng mới mà mọi số bước đều tăng thêm cùng một số nguyên k. Với một tập số nguyên S, ký hiệu $k+S = \{k+n : n \in S\}$, tức là tập nhận được bằng cách cộng k vào từng phần tử của S. Chẳng hạn, $2 + \{3, 5\} = \{5, 7\}$. Bổ đề sau không cần điều kiện nguyên tố cùng nhau.

Bổ đề 5.3. *Cho các số nguyên $A, B > 1$, $s \geq 1$ và $k \geq 0$. Khi đó*

$$\mathcal{L}(\underbrace{A, \dots, A}_{s \text{ lần}}, A^k B) = k + \mathcal{L}(\underbrace{A, \dots, A}_{s \text{ lần}}, B). \tag{8}$$

Chứng minh. Nếu $k = 0$ thì hai vế là cùng một tập số bước. Giả sử $k > 0$. Ta đánh dấu phần tử $A^k B$ để phân biệt nó với các phần tử khác. Khi giá trị của phần tử được đánh dấu là $A^j B$, với $j \geq 1$, nó lớn hơn A, còn mọi số lớn hơn 1 không được đánh dấu đều bằng A. Do đó mọi bước trong giai đoạn này có một trong hai dạng

$$(A, A) \longmapsto (A, 1) \quad \text{hoặc} \quad (A, A^j B) \longmapsto (A, A^{j-1} B).$$

Trong dạng thứ hai, $A \mid A^j B$, nên ƯCLN bằng A; ta giữ dấu trên phần tử $A^{j-1} B$.

Luôn còn ít nhất một số A không được đánh dấu. Thật vậy, dạng thứ nhất cần hai số A và để lại một số A, còn dạng thứ hai giữ nguyên số lượng các số A không được đánh dấu. Vì vậy, khi $j > 0$, vẫn có ít nhất hai số lớn hơn 1 và quá trình chưa kết thúc. Theo Định lý 2.1, quá trình phải kết thúc sau hữu hạn bước, nên phần tử được đánh dấu phải đạt giá trị B. Chỉ các bước thuộc dạng thứ hai làm j giảm, mỗi lần giảm đúng một. Do đó có đúng k bước như vậy trước lần đầu đạt B.

Xét một quá trình bất kỳ gồm N bước từ bảng ở vế trái của (8). Trước khi phần tử được đánh dấu trở thành B, giả sử có t bước chọn hai số A không được đánh dấu. Tại thời điểm đạt B, bảng có $s - t$ số A không được đánh dấu và một phần tử được đánh dấu bằng B.

Bây giờ bắt đầu một quá trình mới từ s số A và một phần tử được đánh dấu bằng B. Thực hiện lại t bước chọn hai số A nói trên. Các bước này vẫn hợp lệ: những bước tác động lên phần tử được đánh dấu trong quá trình cũ không làm thay đổi số lượng các số A không được đánh dấu. Sau t bước, bảng mới cũng có $s - t$ số A và phần tử được đánh dấu B. Từ đây, tiếp tục đúng phần còn lại của quá trình cũ. Quá trình mới gồm $N - k$ bước, vì đã bỏ đi đúng k bước làm giảm số mũ j. Lập luận vẫn đúng khi $B = A$, nhờ việc phân biệt phần tử được đánh dấu với những số A còn lại.

Ngược lại, cho một quá trình gồm n bước từ bảng có s số A và một số B. Từ bảng có phần tử được đánh dấu A^kB, dùng một trong s số A để thực hiện liên tiếp k bước thuộc dạng thứ hai. Mỗi bước giữ lại số A vừa chọn, nên cả k bước đều thực hiện được. Sau đó phần tử được đánh dấu bằng B, và ta nối thêm quá trình gồm n bước đã cho. Tổng số bước là $k+n$.

Hai cách xây dựng trên chứng minh cả hai chiều của đẳng thức (8). □

Hệ quả 5.4. *Cho $A, B > 1$ nguyên tố cùng nhau, và đặt $U = A^2B$, $V = AB^2$. Với mọi số nguyên $k \geq 0$, ta có*

$$\mathcal{L}(U, U, U^kV) = \{k+3, k+5, k+6, k+7\}.$$

Do đó với mọi số nguyên $\ell \geq 4$, có một bảng gồm ba số cho các quá trình gồm $\ell-1$ và $\ell+1$ bước, nhưng không cho quá trình nào gồm ℓ bước.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 5.3 với $s = 2$ và hai số U, V thay cho A, B. Sau đó dùng Định lý 5.1, ta được

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(U, U, U^kV) &= k + \mathcal{L}(U, U, V)\\ &= k + \{3, 5, 6, 7\}\\ &= \{k+3, k+5, k+6, k+7\}.\end{aligned}$$

Với $\ell \geq 4$, đặt $k = \ell - 4 \geq 0$. Tập trên trở thành $\{\ell-1, \ell+1, \ell+2, \ell+3\}$, chứa $\ell-1$ và $\ell+1$ nhưng không chứa ℓ. □

Chẳng hạn, lấy $A = 2$, $B = 3$ và $k = 2$. Khi đó $U = 12$, $V = 18$ và $U^kV = 2592$, nên $\mathcal{L}(12, 12, 2592) = \{5, 7, 8, 9\}$.

6 Hai câu hỏi tiếp theo

Ví dụ $(12, 12, 18)$ dùng các số có ước là bình phương của một số nguyên tố. Ta có thể hỏi điều gì xảy ra nếu mọi số ban đầu đều không chứa bình phương. Điều kiện này được giữ nguyên qua phép biến đổi: số mũ của mỗi số nguyên tố chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1, và khi thay (u, v) bằng $(\min(u, v), |u - v|)$, các số mũ mới vẫn thuộc $\{0, 1\}$.

Trong trường hợp này, một số được xác định bởi tập các ước nguyên tố của nó. Nếu hai số ứng với các tập S, T, thì ƯCLN ứng với $S \cap T$, còn số thứ hai được tạo ra ứng với

$$S \triangle T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S).$$

Tập $S \triangle T$ được gọi là *hiệu đối xứng*: nó gồm các phần tử thuộc đúng một trong hai tập S, T. Chẳng hạn, cặp $(6, 15)$ được thay bằng $(3, 10)$. Các tập ước nguyên tố tương ứng thay từ $\{2, 3\}, \{3, 5\}$ thành $\{3\}, \{2, 5\}$.

Bạn đọc thử sức.

(a) Từ bảng $(6, 10, 15)$, một ván chơi có thể kết thúc sau bao nhiêu bước? Hãy tìm tất cả các khả năng và giải thích vì sao không còn khả năng nào khác.

(b) Ta có $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ và $15 = 3 \cdot 5$. Thay $2, 3, 5$ lần lượt bằng ba số nguyên tố đôi một khác nhau p, q, r. Lập luận ở phần (a) cho biết gì về tập $\mathcal{L}(pq, pr, qr)$?

Gợi ý. Sau bước đầu tiên, số nào xuất hiện hai lần trên bảng?

Mỗi số trong bảng (pq, pr, qr) là tích của hai trong ba số nguyên tố đã chọn. Bây giờ ta chỉ giả sử rằng không số nào trên bảng ban đầu chia hết cho bình phương của một số nguyên tố.

Câu hỏi 6.1. Nếu tất cả các số ban đầu đều không chứa bình phương của một số nguyên tố, tập $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ có luôn gồm các số nguyên liên tiếp không?

Định lý 4.1 trả lời khẳng định khi tích của các số ban đầu có nhiều nhất hai ước nguyên tố phân biệt. Trường hợp có nhiều ước nguyên tố phân biệt hơn dẫn đến câu hỏi trên.

Đối với bảng tùy ý, Hệ quả 5.4 cho một số nguyên ℓ không thuộc tập số bước, trong khi $\ell - 1$ và $\ell + 1$ đều thuộc tập ấy. Số ℓ có thể lớn tùy ý, nhưng họ ví dụ này chỉ bỏ sót một số nguyên giữa hai số bước đạt được. Điều này dẫn đến câu hỏi về việc bỏ sót nhiều số nguyên liên tiếp.

Câu hỏi 6.2. Với mỗi số nguyên $h \geq 1$, có tồn tại một bảng $\mathbf{a}$ mà tập $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ có hai phần tử $u < v$ với $v - u - 1 \geq h$, nhưng không chứa số nguyên nào nằm giữa u và v?

Ở đây $v - u - 1$ là số các số nguyên $u + 1, \dots, v - 1$. Câu hỏi yêu cầu cả u và v đều là những số bước đạt được, còn ít nhất h số nguyên liên tiếp nằm giữa chúng đều không đạt được. Bổ đề 5.3 cộng cùng một số vào mọi phần tử của tập số bước, nên giữ nguyên các hiệu $v - u$. Vì vậy bổ đề này chưa cho câu trả lời khi yêu cầu số lượng các số nguyên bị bỏ sót tăng lên.

Tài liệu tham khảo

[1] International Mathematical Olympiad, *67th International Mathematical Olympiad: Problems*, 15–16 July 2026, Problem 1. Đề thi chính thức.

[2] E. Chen, *IMO 2026 Solution Notes*, 27 September 2026, Section 1.1, p. 4. Bản thảo của tác giả.

[3] I. O. Bado, *Solutions des problèmes 1, 2 et 3 IMO 2026 – Jour 1*, bản thảo, 15 July 2026, Section 1. Bản thảo trên ResearchGate.

[4] A. Knopfmacher, Elementary properties of the subtractive Euclidean algorithm, *The Fibonacci Quarterly* **30** (1992), no. 1, 80–83. Toàn văn.

[5] A. C. Yao and D. E. Knuth, Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors, *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **72** (1975), no. 12, 4720–4722. doi:10.1073/pnas.72.12.4720.