Mạng đường hầm ngẫu nhiên

Bài 10 vòng General · HMMT tháng 11/2026

Kỳ thi ngày 7 tháng 11 năm 2026 · Lời giải tiếng Việt

Đề thi gốc của HMMT. Bài 10 do Bryan Guo đề xuất.

Lời giải bằng đồ thị có hướng

Mô hình hóa $n \geq 2$ thành phố bằng một đồ thị đầy đủ. Mỗi cạnh ứng với một đường hầm đề xuất. Các chi phí từ 1 đến $\binom{n}{2}$ được gán theo một hoán vị ngẫu nhiên đều. Ký hiệu $c(uv)$ là chi phí của cạnh uv. Vẽ mũi tên $u \to v$ khi uv là cạnh rẻ nhất kề u. Mỗi thành phố có đúng một mũi tên đi ra. Bỏ hướng các mũi tên và gộp hai mũi tên ngược chiều trên cùng một cạnh, ta thu được mạng đường hầm đã xây.

Giả sử ta đang đi theo các mũi tên và vừa đi từ u đến v. Nếu bước tiếp theo là $v \to w$ với $w \neq u$ thì $c(vw) < c(uv)$, vì v đã chọn vw trong khi uv cũng nối với v. Chi phí không thể giảm nghiêm ngặt mãi trong một tập hữu hạn. Do đó, ta sẽ có lúc quay về ngay thành phố vừa rời. Từ đó trở đi, ta đi qua lại giữa hai thành phố chọn nhau.



Ví dụ với sáu thành phố. Các cạnh được vẽ có chi phí ghi trên hình. Gán các mức từ 5 đến 15 cho những cạnh còn lại theo thứ tự bất kỳ. Từ D, chi phí lần lượt là $4, 3, 1$ trước khi lặp trên cặp A, B. Mạng có hai thành phần, chứa lần lượt các cặp A, B và E, F.

Hai đầu của mỗi đường hầm đã xây dẫn đến cùng một cặp chọn nhau, vì có ít nhất một mũi tên từ đầu này sang đầu kia. Do đó, mọi thành phố trong cùng một thành phần liên thông dẫn đến cùng một cặp. Ngược lại, những thành phố dẫn đến cùng một cặp nối được với nhau qua cặp ấy. Vậy **mỗi thành phần liên thông chứa đúng một cặp chọn nhau**.

Đếm bằng biến chỉ báo

Gọi C_n là số thành phần liên thông. Với mỗi thành phố u, đặt $J_u = 1$ nếu u thuộc một cặp chọn nhau và $J_u = 0$ trong trường hợp còn lại. Mỗi thành phần có đúng hai thành phố được đếm theo cách này, nên

$$2C_n = \sum_u J_u.$$

Cố định hai thành phố phân biệt u, v. Hai thành phố chọn nhau đúng khi uv có chi phí thấp nhất trong các đường hầm đề xuất nối với u hoặc v. Có $2n - 3$ đường hầm trong tập đó, vì mỗi đầu mút có $n - 1$ đường hầm và uv được đếm ở cả hai đầu. Thứ tự ngẫu nhiên đều trên toàn bộ các cạnh cảm sinh thứ tự ngẫu nhiên đều trên tập con này. Do đó

$$\mathbb{P}(u \text{ và } v \text{ chọn nhau}) = \frac{1}{2n-3}.$$

Tính kỳ vọng và mở rộng

Với u cố định, các biến cố u và v chọn nhau ứng với những v khác nhau loại trừ lẫn nhau. Do có $n-1$ giá trị có thể của v, ta được

$$\mathbb{E}[J_u] = \mathbb{P}(J_u = 1) = \frac{n-1}{2n-3}.$$

Tính tuyến tính của kỳ vọng áp dụng cả khi các biến J_u phụ thuộc. Chẳng hạn, với ba thành phố, hai đầu của cạnh rẻ nhất chọn nhau, còn thành phố thứ ba không thể tạo thêm một cặp. Vì vậy, luôn có đúng hai biến chỉ báo bằng 1. Lấy kỳ vọng trong đẳng thức đếm cho

$$\mathbb{E}[C_n] = \frac{1}{2}\sum_{u} \mathbb{E}[J_u] = \frac{n(n-1)}{2(2n-3)} \quad \text{với } n \geq 2.$$

Đáp số cho 100 thành phố $\mathbb{E}[C_{100}] = \dfrac{4950}{197} \approx 25{,}127.$

Với $n = 2$ hoặc $n = 3$, công thức cho kỳ vọng bằng 1, đúng với việc mỗi thành phần chứa ít nhất hai thành phố. Khi n tăng, $\mathbb{E}[C_n]/n$ tiến tới $1/4$. Nếu mở rộng quy tắc sang $n = 1$ bằng cách cho thành phố duy nhất không chọn đường hầm, mạng có một thành phần.

Đối chiếu lời giải chính thức

Lời giải chính thức xét cạnh đắt nhất trên một chu trình vô hướng giả định. Mỗi đầu mút có một cạnh rẻ hơn ngay trên chu trình, nên cạnh đắt nhất không thể được xây. Vì vậy, mạng đã xây là một rừng. Nếu có M đường hầm được chọn ở cả hai đầu thì n lượt chọn tạo ra $n - M$ cạnh phân biệt. Do một rừng có số thành phần bằng số đỉnh trừ số cạnh, số thành phần bằng M.

Hai cách lập luận cho cùng một đẳng thức đếm. Bản chính thức xác định số thành phần từ số cạnh của rừng. Cách dùng mũi tên chỉ ra cặp chọn nhau nằm trong từng thành phần. Phép đếm xác suất $1/197$ và đáp số trong bản chính thức đều đúng.

Lời giải chính thức, trang 10–11 · Kho đề HMMT tháng 11/2026