Olympic Toán Utah 2026

Lời giải và đối chiếu bản công bố

Đề thi ngày 11 tháng 4 năm 2026

Tài liệu trình bày lời giải cho cả sáu bài. Số trang trong các nhận xét là số trang của bản lời giải do Utah Mathematical Olympiad công bố.

Nguồn đối chiếu Đề thi · Lời giải của ban tổ chức

Những điểm cần chú ý trong bản công bố

- Bài 2. Bước đi dùng để chứng minh cận dưới có thể bất khả thi khi Brutus ở biên.
- Bài 4. Cận $\log a_i \geq i$ sai với chính dãy được dùng trong Lời giải 2.
- Bài 5. Bổ đề 6 đặt nhầm điều kiện chỉ số trong hai nhánh của phép đổi chỗ.
- Bài 6. Có cấu hình mà bốn đường trong một nhóm song song và có cấu hình mà một số đường trùng nhau.

Bài 1 Phương trình giai thừa

Ta cần tìm các cặp số nguyên (n, k) thỏa mãn $n \geq 0$, $1 \leq k \leq 10$ và $n! + 1 = (kn + 1)^2$.

Với $n = 0$, hai vế của phương trình lần lượt bằng 2 và 1. Với $n \geq 1$, khai triển bình phương rồi chia cho n^2, ta được phương trình tương đương

$$\frac{(n-1)!}{n} = k^2 + \frac{2k}{n} \leq 100 + \frac{20}{n}.$$

Từ $n = 2$ trở đi, vế trái tăng nghiêm ngặt theo n vì tỉ số của hai giá trị liên tiếp là $n^2/(n+1) > 1$. Trong khi đó, $100 + 20/n$ giảm theo n. Tại $n = 7$ ta có $6!/7 = 100 + 20/7$. Do đó bất đẳng thức trên không thể xảy ra khi $n > 7$.

Với $n = 1, \ldots, 7$, các giá trị của $n! + 1$ lần lượt là $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041$. Chỉ $25 = 5^2$, $121 = 11^2$ và $5041 = 71^2$ là số chính phương. Ở ba trường hợp đó, lần lượt giải $4k+1 = 5$, $5k+1 = 11$ và $7k+1 = 71$, ta được đúng ba cặp $(n, k) = (4, 1), (5, 2), (7, 10)$.

Đối chiếu lời giải của ban tổ chức

Ở Lời giải 1, trang 1, bản công bố đã loại mọi $n \geq 8$ nhưng ghi miền còn lại là $0 \leq n \leq 8$. Cận trên đúng của miền còn lại là 7. Ở Lời giải 2, trang 1, $v_p(x)$ trong công thức Legendre là *số mũ* lớn nhất e sao cho $p^e \mid x$. Cả hai điểm đều có thể sửa ngay tại chỗ và ba nghiệm công bố đều đúng.

Bài 2 Trò đuổi bắt trên lưới

Đánh số hàng và cột từ 1 đến N sao cho James xuất phát tại $(1,1)$. Điều kiện hai vị trí xuất phát phân biệt bảo đảm $N \geq 2$. Mỗi lượt, Brutus đi trước theo phương ngang hoặc dọc. James đi sau và cũng có thể đi chéo. Brutus bị bắt ngay khi hai vị trí trùng nhau. Ký hiệu $B_t = (x_t, y_t)$ là vị trí của Brutus ngay sau bước đi thứ t của nó, với B_0 là vị trí ban đầu.

James bắt được Brutus trong nhiều nhất $N-1$ bước. Sau bước đi thứ t của Brutus, nếu trò chơi còn tiếp diễn, James chọn vị trí

$$J_t = \big(\min\{t+1, x_t\}, \min\{t+1, y_t\}\big).$$

Công thức cũng cho $J_0 = (1,1)$. Từ lượt $t-1$ đến lượt t, mỗi đối số trong từng phép lấy giá trị nhỏ nhất thay đổi nhiều nhất 1, nên mỗi tọa độ của J_t cũng thay đổi nhiều nhất 1. Mặt khác, mỗi tọa độ của J_{t-1} không vượt quá t. Nếu $J_t = J_{t-1}$ thì các giá trị nhỏ nhất trong công thức của J_t đều nhỏ hơn $t+1$, suy ra $B_t = J_{t-1}$. Khi đó Brutus đã bị bắt ngay sau bước đi của nó. Trong mọi lượt còn tiếp diễn, bước đi tới J_t vì thế hợp lệ. Đến $t = N-1$ thì $J_t = B_t$, vì cả hai tọa độ của B_t đều không vượt quá N.

Brutus buộc James phải đi ít nhất $N-1$ bước. Chọn một tọa độ mà giá trị ban đầu của Brutus là $u \geq 2$. Brutus tăng tọa độ này thêm 1 ở mỗi lượt cho đến khi đạt N. Từ đó về sau, nó chỉ di chuyển theo tọa độ kia, nơi luôn có ít nhất một bước hợp lệ vì $N \geq 2$. Sau bước đi thứ t của Brutus, tọa độ được chọn bằng $\min\{N, u+t\}$. Với $1 \leq t \leq N-1$, giá trị này lớn hơn t, trong khi tọa độ của James trước bước đi thứ t của mình không vượt quá t. Với $1 \leq t \leq N-2$, giá trị đó còn lớn hơn $t+1$, là cận trên cho tọa độ của James sau bước đi thứ t. Vì vậy, Brutus không thể bị bắt trước khi James thực hiện bước đi thứ $N-1$.

Hai cận trùng nhau ở mọi vị trí xuất phát hợp lệ của Brutus. Do đó kỳ vọng của số bước James cần đi là $N-1$.

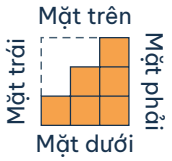
Đối chiếu lời giải của ban tổ chức

Trong chứng minh cận trên ở trang 3, bước quy nạp cần xét cả trường hợp một tọa độ của James và Brutus đang bằng nhau rồi Brutus thay đổi tọa độ đó. Chẳng hạn, từ $J = (1,1)$ và $B = (2,1)$, Brutus có thể đi đến $(2,2)$, nên quan hệ bằng nhau ở tọa độ thứ hai không còn đúng ngay sau bước đi này. James có thể khôi phục đẳng thức bằng cách đi một đơn vị theo tọa độ ấy.

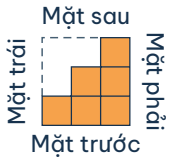
Ở cận dưới, trang 3–4, bản công bố nói Brutus có thể tăng khoảng cách theo một tọa độ lên 2. Điều đó không đúng nếu Brutus đã ở biên theo tọa độ được chọn. Chẳng hạn, với $N = 2$, $J = (1,1)$ và $B = (2,1)$, khoảng cách ở mỗi tọa độ luôn không vượt quá 1. Brutus vẫn có thể đi đến $(2,2)$ để buộc James phải thực hiện một bước. Chiến lược tiến đến biên rồi giữ tọa độ ở biên trong lời giải trên xác lập cận dưới cho mọi vị trí xuất phát, nên đáp số $N-1$ được giữ nguyên.

Bài 3 Ba hình chiếu

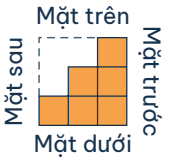
Có **52 cách** sắp xếp. Ta đếm theo ba lớp từ trái sang phải.



Nhìn từ trước



Nhìn từ trên



Nhìn từ trái

Đánh số x, y, z từ 0 đến 2, lần lượt theo chiều trái sang phải, trước ra sau và dưới lên trên. Ở hình chiếu trước, ô (x, z) có màu cam khi và chỉ khi $z \le x$. Ở hình chiếu trên, ô (x, y) có màu cam khi và chỉ khi $y \le x$. Trong hình chiếu trái, cột ứng với y có chỉ số $2 - y$ tính từ trái sang, nên ô (y, z) có màu cam khi và chỉ khi $y + z \le 2$. Do đó một vị trí (x, y, z) có thể chứa khối lập phương chỉ khi

$$y \le x, \qquad z \le x, \qquad y + z \le 2.$$

Nếu chỉ đặt khối ở các vị trí này thì không có ô trắng nào bị che. Vì vậy, điều kiện còn lại là mỗi đường chiếu ứng với một ô cam phải chứa ít nhất một khối.

Trong lớp $x = 0$ chỉ có vị trí $(0, 0, 0)$ được phép đặt khối lập phương, và ô cam $(x, z) = (0, 0)$ buộc phải đặt khối ở đó. Tương tự, ô cam $(x, z) = (2, 2)$ trong hình chiếu trước và ô cam $(x, y) = (2, 2)$ trong hình chiếu trên lần lượt buộc phải đặt khối tại $(2, 0, 2)$ và $(2, 2, 0)$.

Trong lớp $x = 1$, bốn vị trí $(y, z) \in \{0, 1\}^2$ tạo thành bảng 2×2. Các hình chiếu trước và trên yêu cầu mỗi hàng và mỗi cột của bảng có ít nhất một khối. Ở lớp $x = 2$, ngoài hai vị trí bắt buộc, còn bốn vị trí có $(y, z) \in \{0, 1\}^2$. Hai vị trí bắt buộc đã bảo đảm các ô cam ứng với $y = 0, 2$ và $z = 0, 2$ trong hai hình chiếu này. Vì thế lớp $x = 2$ chỉ cần thêm ít nhất một khối với $z = 1$ và ít nhất một khối với $y = 1$.

Ba khối bắt buộc đã cho ba ô cam $(0, 0), (0, 2), (2, 0)$ trong hình chiếu trái. Mỗi ô cam còn lại $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$ phải có một khối ở lớp $x = 1$ hoặc $x = 2$. Gọi E là tập những ô trong ba ô này mà lớp $x = 2$ để trống. Lớp $x = 1$ phải chứa một khối tại mỗi vị trí thuộc E. Hai yêu cầu $z = 1$ và $y = 1$ ở lớp $x = 2$ cho đúng năm lựa chọn

$$E = \varnothing, \quad \{(0, 1)\}, \quad \{(1, 0)\}, \quad \{(1, 1)\}, \quad \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Nếu $E = \varnothing$, bảng của lớp $x = 1$ có thể không có ô trống, có một ô trống hoặc có hai ô trống ở hai góc đối diện. Số bảng tương ứng là 1, 4 và 2, tổng cộng 7. Nếu E gồm một ô, trong bảy bảng đó có đúng hai bảng để trống ô này, nên còn 5 bảng. Nếu $E = \{(0, 1), (1, 0)\}$, hai khối ở góc đối diện đã đáp ứng yêu cầu theo hàng và cột, nên hai góc còn lại được chọn tự do, cho 4 bảng. Cuối cùng, vị trí $(2, 0, 0)$ không ảnh hưởng đến hình chiếu nào vì cả ba đường chiếu qua vị trí này đã có khối bắt buộc. Vị trí đó cho thêm hệ số 2. Vậy số cách là $2(7 + 3 \cdot 5 + 4) = 52$.

Đối chiếu lời giải của ban tổ chức

Ở trang 5, Phương pháp 1 lặp điều kiện $c_0 = 1$ ở cả hai nhánh trong Trường hợp 1. Nhánh thứ hai phải là $c_0 = 0$, khi đó hai điều kiện $\max(a_0, c_0) = \max(c_0, d_0) = 1$ mới buộc $a_0 = d_0 = 1$. Phần mở đầu nói có năm trường hợp, còn phần liệt kê thực tế chia thành bốn nhóm bao quát đủ các khả năng. Ở trang 6, khi chọn bốn đỉnh được tô trong lục giác, phép tính $\binom{6}{2} - 6$ đếm cách chọn hai đỉnh *không tô* và loại sáu cặp đỉnh kề nhau. Các lỗi diễn đạt này không làm thay đổi kết quả 52.

Bài 4 Tổng của hai số hạng

Khẳng định **sai**. Các chữ số trong hệ cơ số 4 sẽ xác định một dãy có tính chất tổng của hai số hạng nhưng có các tỉ số a_i/i lớn tùy ý.

Gọi U là tập các số nguyên không âm chỉ có chữ số 0 hoặc 1 trong hệ cơ số 4. Lấy $a_0, a_1, \ldots$ là dãy liệt kê tăng dần các phần tử của $U \cup 2U$, với $2U = \{2u : u \in U\}$. Mỗi chữ số d trong hệ cơ số 4 viết duy nhất dưới dạng $d = \varepsilon + 2\delta$ với $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$. Nếu $n = \sum_{j=0}^{m} d_j 4^j$, áp dụng phép tách này cho từng d_j ta được

$$n = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j 4^j + 2\sum_{j=0}^{m} \delta_j 4^j.$$

Số hạng thứ nhất thuộc U, số hạng thứ hai thuộc $2U$. Vậy dãy có tính chất tổng của hai số hạng.

Với mỗi $m \geq 1$, có đúng 2^m phần tử của U nhỏ hơn 4^m do mỗi vị trí trong m chữ số có hai lựa chọn. Các phần tử của $2U$ có chữ số 0 hoặc 2, nên cũng có đúng 2^m phần tử nhỏ hơn 4^m. Hai tập chỉ có chung số 0. Vì 4^m thuộc U, nó là số hạng có chỉ số $2^{m+1} - 1$. Suy ra

$$\frac{a_{2^{m+1}-1}}{2^{m+1}-1} = \frac{4^m}{2^{m+1}-1} > 2^{m-1}.$$

Các tỉ số này lớn tùy ý, nên không tồn tại hằng số K như trong khẳng định.

Đối chiếu lời giải của ban tổ chức

Lỗi lập luận nằm ở Lời giải 2, trang 7. Với a_i là số thứ i trong dãy các tổng của hai số chính phương, bản gốc suy ra đúng rằng

$$a_i \geq \frac{(i+1)\sqrt{\log a_i}}{C}$$

khi i đủ lớn. Tuy nhiên, bước thay $\sqrt{\log a_i}$ bằng cận dưới $\sqrt{i}$ là sai. Dãy chứa $i+1$ số chính phương phân biệt $0^2, 1^2, \ldots, i^2$ vì $j^2 = j^2 + 0^2$. Do đó $a_i \leq i^2$ và $\log a_i \leq 2\log i < i$ với mọi i đủ lớn.

Bất đẳng thức trước bước sai đã đủ để kết luận. Thật vậy, $a_i \to \infty$ vì dãy gồm các số nguyên phân biệt, nên $\sqrt{\log a_i}/C \to \infty$. Suy ra $a_i/i \to \infty$. Cách dựng phản ví dụ trong bản công bố vẫn đúng.

Ở trang 6, danh sách đầu của hai dãy cũng có lỗi chỉ số. Trong Lời giải 1, $a_3 = 4$ và $a_4 = 9$. Trong Lời giải 2, $a_5 = 8$. Ghi chú ở trang 7 nêu một tương đương với giả thuyết Goldbach. Chiều từ tính chất tổng của hai số hạng đến giả thuyết Goldbach chưa được chứng minh trong bản gốc. Chẳng hạn, cách biểu diễn $n = (p+1) + (q+1)$ với hai số nguyên tố p, q chỉ suy ra $n - 2 = p + q$. Ghi chú này không tham gia vào hai lời giải.

Bài 5 Thứ tự đặt khúc gỗ

Hai thứ tự tối ưu thu được bằng cách đặt $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ vào các vị trí lẻ theo thứ tự tăng dần và $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ vào các vị trí chẵn theo thứ tự giảm dần. Có thể đổi chỗ hai khúc gỗ đầu tiên.

Lấy tâm gốc cây làm vị trí xuất phát như trong hình minh họa. Gọi d_j là khoảng cách từ Fiona đến tâm gốc cây sau j lượt, trong đó mỗi lượt dùng hai khúc gỗ. Ký hiệu độ dài của chúng ở lượt j là u_j, v_j theo thứ tự sử dụng. Từ cách đi và định lý Pythagore,

$$d_0 = 0 \quad \text{và} \quad d_j = \sqrt{(d_{j-1} + u_j)^2 + v_j^2}.$$

Khi $j = 1$, công thức giữ nguyên khi đổi u_1 và v_1. Ta sẽ chứng minh rằng với $n \geq 2$, lượt cuối phải dùng khúc dài nhất trước và khúc ngắn nhất sau.

Khúc ngắn nhất ở vị trí cuối. Nếu $u_n < v_n$, đổi chỗ hai khúc này làm d_n^2 tăng thêm $2d_{n-1}(v_n - u_n)$, một lượng dương. Giả sử một khúc ở lượt trước có độ dài nhỏ hơn v_n. Khi đổi nó với v_n, tổng bình phương các độ dài trong công thức

$$d_n^2 = \sum_{j=1}^{n}(u_j^2 + v_j^2) + 2\sum_{j=1}^{n} u_j d_{j-1}$$

giữ nguyên. Mỗi d_{j-1} trong tổng thứ hai không giảm, vì độ dài vừa đưa vào phần đầu lớn hơn và công thức truy hồi tăng theo từng biến. Các u_j cũng không giảm. Hơn nữa, d_{n-1} tăng nghiêm ngặt, nên số hạng $u_n d_{n-1}$ tăng. Do đó một thứ tự tối ưu phải có $v_n = x_1$.

Khúc dài nhất ở vị trí áp chót. Giảm độ dài một khúc trong $n-1$ lượt đầu đi $\delta > 0$ làm d_{n-1} giảm ít hơn δ. Thật vậy, ở lượt có thay đổi, hai vectơ $(d_{j-1} + u_j, v_j)$ trước và sau chỉ khác nhau ở một tọa độ và có cả hai tọa độ dương. Bất đẳng thức tam giác đảo cho thấy độ chênh giữa hai độ dài nhỏ hơn δ. Dấu nghiêm do hai vectơ không cùng phương. Ở mỗi lượt sau, cùng bất đẳng thức cho thấy chênh lệch hiện có không tăng. Nếu một khúc trong phần đầu dài hơn u_n một lượng δ, đổi chỗ nó với u_n làm d_{n-1} giảm ít hơn δ và làm u_n tăng đúng δ. Khi đó $d_{n-1} + u_n$ tăng và v_n giữ nguyên, nên d_n tăng. Vậy $u_n = x_{2n}$.

Với cặp cuối đã xác định, d_n tăng nghiêm ngặt theo d_{n-1}. Do đó phần đầu phải tối ưu cho các khúc gỗ còn lại. Lặp lại việc chọn cặp dài nhất và ngắn nhất cho đến khi còn hai khúc x_n, x_{n+1}. Cả hai thứ tự của cặp đầu cho cùng d_1. Vì có hữu hạn thứ tự, giá trị lớn nhất đạt được và đúng hai thứ tự đã nêu đạt giá trị đó.

Đối chiếu lời giải của ban tổ chức

Trong Bổ đề 6 của Cách 1 (tr. 10), hai điều kiện dùng để chia trường hợp bị đặt nhầm. Nhánh $i \neq 1$ vẫn cho phép $j = 1$, khi đó bất đẳng thức sau khi đổi chỗ trở thành $a_1' > a_1'$. Tương tự, nhánh $j \neq 1$ vẫn cho phép $i = 1$ và cho $a_2' > a_2'$. Để sửa, dùng $j \neq 1$ cho nhánh so sánh với a_{2j-1}' và $i \neq 1$ cho nhánh so sánh với a_{2i}'. Các bất đẳng thức trung gian tương ứng là $a_2 \geq a_{2i}$ và $a_{2j-1} \geq a_1$.

Trong Bổ đề 5 (tr. 10), các hàm cho $2k+2$ khúc phải mang chỉ số $k+1$. Phép đổi chỗ ở đó chỉ buộc khúc cuối nhỏ nhất trong các khúc ở vị trí chẵn. Để dùng quy nạp, cần lưu ý rằng phần đầu của một thứ tự tối ưu cũng tối ưu cho chính các khúc trong phần đầu ấy, do khoảng cách tăng nghiêm ngặt theo khoảng cách trước lượt cuối. Ở Bổ đề 3 (tr. 8–9), f_{2k-2} phải là f_{k-1}. Ở bước cơ sở của Bổ đề 4 (tr. 9), f_2^2 phải là f_1^2.

Bài 6 Bốn đường tròn tiếp xúc

Dùng giả thiết rằng mỗi $P_j \neq O_j$ tồn tại duy nhất. Ta xét các đường thẳng theo cặp chỉ số (i, j) và dùng điều kiện cùng phương cho trường hợp song song, kể cả các đường trùng nhau. Với mỗi hoán vị σ trong danh sách $\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$, lấy nhóm gồm bốn đường $O_iP_{\sigma(i)}$ với $1 \leq i \leq 4$.

Trước hết, các tiếp điểm đôi một khác nhau. Nếu ba đường tròn có cùng tiếp điểm thì mọi điểm trên tiếp tuyến chung, trừ tiếp điểm, đều nằm ngoài cả ba và có cùng phương tích đối với chúng. Điều này trái với tính duy nhất của P_j ứng với bộ ba ấy. Nếu hai cặp rời nhau có cùng tiếp điểm, cả bốn đường tròn đi qua điểm đó và cũng có ít nhất ba đường tròn tiếp xúc tại đó.

Nếu có một cặp đĩa lồng nhau, đĩa có bán kính lớn nhất phải là đĩa lớn của cặp hoặc chứa đĩa đó. Nếu tiếp xúc ngoài với đĩa lớn của cặp, nó chỉ có thể chạm đĩa nhỏ tại cùng tiếp điểm, điều đã bị loại. Vì lý do tương tự, đĩa lớn nhất phải chứa mọi đĩa còn lại. Hai đĩa bên trong cũng không thể lồng nhau vì chúng sẽ chạm đĩa lớn nhất tại cùng một điểm. Dùng bán kính có dấu r_i, âm cho đường tròn bao ngoài nếu có. Khi đó $|O_i - O_j|^2 = (r_i + r_j)^2$ với $i \neq j$.

Viết $O_i = (x_i, y_i)$ và đặt

$$v_i = \frac{(1, x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 - r_i^2)}{r_i}.$$

Trên $\mathbb{R}^4$, dùng dạng song tuyến tính

$$\langle (a,b,c,d), (a',b',c',d') \rangle = bb' + cc' - \frac{ad' + da'}{2}.$$

Khai triển cho $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ và

$$\langle v_i, v_j \rangle = \frac{r_i^2 + r_j^2 - |O_i - O_j|^2}{2r_ir_j} = -1 \quad \text{với } i \neq j.$$

Nếu $\sum_j \lambda_j v_j = 0$ thì ghép cặp với v_i cho $2\lambda_i - \sum_j \lambda_j = 0$ với mọi i. Cộng bốn đẳng thức rồi thế ngược lại cho $\lambda_i = 0$ với mọi i. Vậy $v_1, \ldots, v_4$ là một cơ sở.

Đặt $H = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)/2$ và $w_j = v_j - H$. Vì $\langle v_i, H \rangle = -1$, ta có $\langle v_i, w_j \rangle = 0$ với $i \neq j$ và $\langle v_j, w_j \rangle = 2$. Viết $P_j = (X_j, Y_j)$ và gọi ρ_j^2 là phương tích chung của P_j đối với ba đường tròn có chỉ số khác j. Theo công thức phương tích, vectơ $(1, X_j, Y_j, X_j^2 + Y_j^2 - \rho_j^2)$ cũng trực giao với mọi v_i có $i \neq j$. Ma trận các tích $\langle v_i, w_k \rangle$ là $2I$, nên các điều kiện trực giao này xác định đúng đường thẳng sinh bởi w_j. Vậy vectơ trên tỉ lệ với w_j.

Gọi π là phép lấy ba tọa độ đầu. Khi đó $\pi(v_i)$ tỉ lệ với $(1, x_i, y_i)$ và $\pi(w_j)$ tỉ lệ với $(1, X_j, Y_j)$. Hai điểm O_i, P_j phân biệt, do giả thiết khi $i = j$ và do P_j nằm ngoài ω_i khi $i \neq j$. Nếu một vectơ $(a, b, c) \neq 0$ thuộc $\mathrm{span}(\pi(v_i), \pi(w_j))$, nó là tổ hợp tuyến tính của $(1, x_i, y_i)$ và $(1, X_j, Y_j)$. Với $a \neq 0$, điểm $(b/a, c/a)$ thuộc O_iP_j. Với $a = 0$, vectơ (b, c) là một vectơ chỉ phương của đường đó.

Với hoán vị đồng nhất, $H = v_i - w_i$ thuộc mọi không gian $\mathrm{span}(v_i, w_i)$. Từ $\langle H, H \rangle = -2$ suy ra tọa độ đầu của H khác 0, vì nếu $a = 0$ thì $\langle H, H \rangle = b^2 + c^2$. Do đó $\pi(H)$ xác định điểm đồng quy. Với hoán vị $(ij)(kl)$, đặt $U = v_i + v_j - H$. Ta có

$$U = v_i + w_j = v_j + w_i = -(v_k + w_l) = -(v_l + w_k).$$

Vì $\langle U, U \rangle = 2$, ta có $\pi(U) \neq 0$. Vectơ $\pi(U)$ cho điểm hoặc phương chung của cả bốn đường trong nhóm.

Mỗi nhóm đi qua đủ tám điểm vì σ là hoán vị. Với mỗi i, bốn hoán vị gửi i đến bốn giá trị khác nhau, nên mỗi cặp (i, j) được dùng đúng một lần.

Bài 6 Đối chiếu bản công bố

Giả thiết về các điểm P_j. Sự tiếp xúc đôi một của bốn đường tròn chưa bảo đảm các điểm này tồn tại. Chẳng hạn, cho ω_2 tâm $(0,0)$ bán kính 2, ω_3, ω_4 tâm $(-1,0), (1,0)$ bán kính 1 và ω_1 tâm $(0,4/3)$ bán kính $2/3$. Bốn đường tròn tiếp xúc đôi một tại sáu điểm khác nhau. Các trục đẳng phương của ba cặp trong bộ $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ là $x=-2$, $x=2$ và $x=0$. Do đó P_1 không tồn tại. Trong hai ví dụ tiếp theo, mọi bộ ba tâm đều không thẳng hàng. Vì vậy, với mỗi P_j, việc cho ba phương tích bằng nhau xác định hai phương trình bậc nhất độc lập.

Các đường song song trong Cách 2 (tr. 22–23). Ở tr. 22, Cách 2 dùng một dạng đảo của định lý Pitot để suy ra có đường tròn δ tiếp xúc với bốn đường thẳng chứa các cạnh của $O_1O_2O_4O_3$. Kết luận này có thể sai. Lấy

$$(O_1, O_2, O_3, O_4) = ((-2,-3), (-2,0), (-6,-3), (-6,0)),$$
$$(|r_1|, |r_2|, |r_3|, |r_4|) = (1, 2, 3, 6).$$

Ba đường tròn trong tiếp xúc ngoài từng đôi một và cùng tiếp xúc trong với ω_4. Tứ giác $O_1O_2O_4O_3$ là hình chữ nhật 4×3, thỏa mãn $O_4O_2 + O_2O_1 = O_4O_3 + O_3O_1 = 7$. Tiếp xúc với hai cặp đường thẳng song song sẽ đòi bán kính của δ đồng thời bằng 2 và $3/2$. Giải các phương trình phương tích cho

$$P_1 = (0,-6), \quad P_2 = (-3,-6),$$
$$P_3 = (0,-2), \quad P_4 = (-3,-2).$$

Các phương tích chung lần lượt là $36, 9, 4, 1$, đều dương. Bốn đường $O_1P_4, O_2P_3, O_3P_2, O_4P_1$ song song và phân biệt, với phương trình lần lượt là $x+y = -5, -2, -9, -6$. Đây chính là nhóm mà Cách 2 khẳng định đồng quy ở tr. 23.

Các đường trùng nhau và bước dùng Desargues (tr. 24). Xét bốn đường tròn tiếp xúc ngoài với

$$(O_1, O_2, O_3, O_4) = ((0,3/4), (0,5/12), (-1,0), (1,0)),$$
$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1/4, 1/12, 1, 1).$$

Giải các phương trình phương tích cho $P_1 = (0, 1/5)$, $P_2 = (0, 1/3)$, $P_3 = (1/8, 1/2)$ và $P_4 = (-1/8, 1/2)$. Các phương tích chung là $1/25, 1/9, 1/64, 1/64$. Ở đây O_1O_2 và P_1P_2 đều là $x=0$, nên giao điểm T dùng trong lập luận Desargues không xác định duy nhất. Các điều kiện không thẳng hàng của bổ đề vẫn được thỏa mãn. Thật vậy, với i, j, k phân biệt, P_k nằm trên tiếp tuyến chung của ω_i, ω_j và khác tiếp điểm, nên P_k không nằm trên O_iO_j. Còn P_iP_j là tiếp tuyến chung của hai đường tròn còn lại, nên không đi qua O_k. Đoạn cuối tr. 24 còn ghi nhầm bộ ba định nghĩa P_3. Bộ ba đúng là $\omega_1, \omega_2, \omega_4$.

Trong cấu hình này, chỉ có ba đường thẳng phân biệt trong danh sách đi qua O_1, gồm $x=0$, O_1P_3 và O_1P_4. Các đường khác trong danh sách cắt trục tung ở những độ cao thuộc $\{1/5, 1/3, 5/12, 4/9, 4/7\}$. Do đó nếu mỗi đường thẳng chỉ được dùng một lần thì không thể có bốn nhóm rời nhau cùng đi qua O_1. Phát biểu nên nói rõ rằng ta chia mười sáu *cặp chỉ số* (i, j), cho phép các cặp khác nhau xác định cùng một đường.

Một lỗi ký hiệu trong Cách 1 (tr. 14). Đoạn chứng minh hình chữ nhật là hình vuông lấy bán kính của ω_1', trong khi ω_1' là một đường thẳng. Đường tròn có bán kính cần dùng ở đây là ω_3', tiếp xúc với cả hai đường thẳng song song ω_1', ω_2'.